Inleidend voorbeeld

We wensen de wortels of oplossing van de volgende derde graadvergelijking te bepalen via een numerieke aanpak

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$$

De meest eenvoudige techniek is de binaire zoekiteratie die past in een grotere klasse van strategieën die men de "verdeel-en-heers" of "branch-and-bound" zoekiteraties.

Inleidend voorbeeld

We wensen de wortels of oplossing van de volgende derde graadvergelijking te bepalen via een numerieke aanpak

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$$

De meest eenvoudige techniek is de binaire zoekiteratie die past in een grotere klasse van strategieën die men de "verdeel-en-heers" of "branch-and-bound" zoekiteraties.

Onderstel dat alle nulpunten enkelvoudig zijn en de functie continu, dan impliceert een nulpunt een tekenverwisseling. Indien we het interval $[a,b]$ beschouwen zodat $f(a).f(b) < 0$ dan moet het interval een nulpunt bevatten.

Beschouw het midden $c = \frac{a+b}{2}$ dan verkleinen we het zoekinterval tot

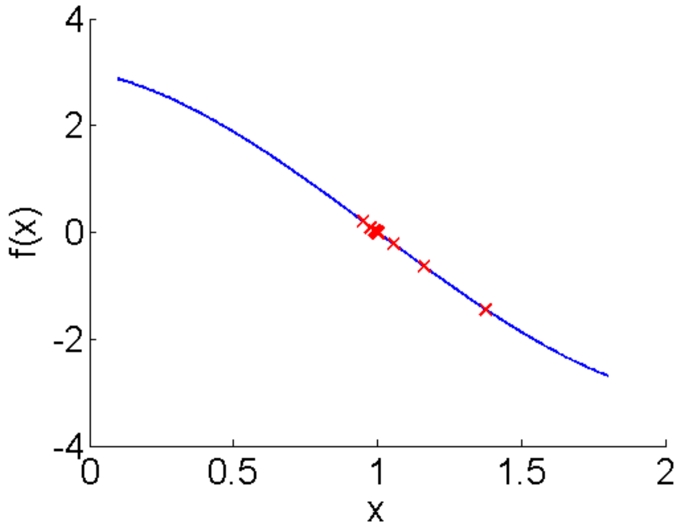
$$[a,c] \text{ indien } f(a).f(c) < 0$$
$$[c,b] \text{ indien } f(c).f(b) < 0$$

Inleidend voorbeeld

We wensen de wortels of oplossing van de volgende derde graadvergelijking te bepalen via een numerieke aanpak

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$$

```
function wortel=VerdeelHeers(f,a,b)
tol=1e-16;c=NaN;
while f(a)*f(b)<-tol do
    c=(a+b)/2
    if f(c)*f(a)<0 then
        b=c;
    else a=c;
    endif
endwhile
wortel=c;
```



Verdeel-en-heers strategie

Numeriek zwak stabiel algoritme aangezien alleen de berekening van de waarde c een probleem kan opleveren wat niet slechter wordt dan de conditionering van het probleem.

Nadeel: Het algoritme convergeert traag en er bestaat geen uitbreiding naar hogere dimensies (i.e. functies met meerdere onbekenden).

Verdeel-en-heers strategie

Numeriek zwak stabiel algoritme aangezien alleen de berekening van de waarde c een probleem kan opleveren wat niet slechter wordt dan de conditionering van het probleem.

Nadeel: Het algoritme convergeert traag en er bestaat geen uitbreiding naar hogere dimensies (i.e. functies met meerdere onbekenden).

Stel dat de limiet van het iteratief proces gegeven wordt door α dan heet het iteratief proces met stappen $x_n, n \in \mathbb{N}$ van orde p indien

$$|x_n - \alpha| \leq C|x_{n-1} - \alpha|^p$$

Verdeel-en-heers strategie

Stelling: De verdeel-en-heers of binaire zoekiteratie convergeert lineair $(p = 1)$ zodat de fout gegeven wordt door

$$|x_n - \alpha| \approx \frac{1}{2}|x_{n-1} - \alpha|$$

Bewijs. Beschouw de verschillende zoekintervallen

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$$

De halveringsstrategie levert dat $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

Er volgt nu dat voor $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ geldt:

$$|c_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$$

Bijgevolg verwacht men in het slechtste geval per iteratiestap een halvering van de fout. ■